

Gibbs方法-从美国棒球联赛的预测谈起

一.马氏链

设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为马氏链, 转移概率为 $p(y|x)$.

若 $\pi(x)$ 满足:1) $\int \pi(x)p(y|x)dx = \pi(y)$;

$$2) \int \pi(x)dx = 1.$$

则称 $\pi(x)$ 为平稳分布。

定理: 若马氏链 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为非周期, 不可约的, 则存在唯一的极限平稳分布。

若分布 $f(x)$ 满足下列细节平衡公式:

$$\forall x \neq y \quad f(x)p(y|x) = f(y)p(x|y)$$

则 $f(x)$ 为平稳分布。

$$\begin{aligned} \text{证: } \int f(x)p(y|x)dx &= \int f(y)p(x|y)dx \\ &= f(y) \int p(x|y)dx = f(y) \end{aligned}$$

注: 可以通过细节平衡公式寻找转移概率 $p(y|x)$ 。

二.Metropolis-Hastings算法（1970年）

问题:

如何构造马氏链 $\{X_n, n \geq 0\}$, 使得其极限分布为 $f(x)$?

即构造转移概率 $p^*(y|x)$, 使得

$$f(x)p^*(y|x) = f(y)p^*(x|y)$$

首先选取一个转移概率 $p(y|x)$ (称为建议分布),然后再通过取舍法, 取舍概率假设为 $\alpha(x, y)$. 于是

$$p^*(y|x) = p(y|x)\alpha(x, y)$$

因此

$$f(x) p(y|x)\alpha(x, y) = f(y) p(x|y)\alpha(y, x)$$

可以选取 $\alpha(x, y) = \min\{\frac{f(y)p(x|y)}{f(x)p(y|x)}, 1\}$, 则有

$$f(x)p(y|x)\alpha(x, y) = f(x)p(y|x) \min\{\frac{f(y)p(x|y)}{f(x)p(y|x)}, 1\}$$

$$= \min\{f(y)p(x|y), f(x)p(y|x)\} = f(y)p(x|y)\alpha(y, x)$$

也即 $f(x)$ 为平稳分布。

综上所述，得到**M-H**算法如下：

1) . 令 $n=0$, 任取 X_0 , 选取合适的建议分布 $p(y|x)$;

2).生成 $X \sim p(\cdot | X_n)$;

3).若 $U < \alpha(X_n, X) = \min\left\{\frac{f(X)p(X_n|X)}{f(X_n)p(X|X_n)}, 1\right\}$

即 $U < \frac{f(X)p(X_n|X)}{f(X_n)p(X|X_n)}$ (称为Metropolis-Hastings比率) ,

则 $X_{n+1} = X$, 否则 $X_{n+1} = X_n$;

4). $n = n + 1$, 转2) .

2.1.Metropolis算法（1953年）

若建议分布为对称的，即 $p(y|x)=p(x|y)$. 则称为Metropolis算法. 此时 $\alpha(x, y)=\min\{\frac{f(y)}{f(x)}, 1\}$. 具体步骤如下：

- 1) . 令 $n=0$, 任取 X_0 , 选取合适的建议分布 $p(y|x)$;
- 2).生成 $X \sim p(\cdot|X_n)$;
- 3).若 $U < \frac{f(X)}{f(X_n)}$, 则 $X_{n+1} = X$, 否则 $X_{n+1} = X_n$;
- 4). $n = n + 1$, 转2) .

2.2.独立链算法

若 $p(y|x) = p(y)$,也即建议分布与初始状态 x 无关, 则为独立链

算法。此时 $\alpha(x, y) = \min\left\{\frac{f(y)p(x)}{f(x)p(y)}, 1\right\} = \min\left\{\frac{\omega(y)}{\omega(x)}, 1\right\}$, 其中 $\omega(x) = \frac{f(x)}{p(x)}$

为重要性权重。

注：若建议分布 $p(x)$ 的支撑包含 $f(x)$ 的支撑, 则马氏链是非周期, 不可约的。

具体步骤如下：

- 1) . 令 $n=0$, 任取 X_0 , 选取合适的建议分布 $p(\cdot)$;
- 2).生成 $X \sim p(\cdot)$;
- 3).若 $U < \frac{f(X)p(X_n)}{f(X_n)p(X)}$, 则 $X_{n+1} = X$, 否则 $X_{n+1} = X_n$;
- 4). $n = n + 1$, 转2) .

例：用M-H算法产生折叠正态分布

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-x^2/2}, x > 0.$$

的随机数。

解：步骤如下：

1) . 令 $n=0$, 任取 $X_0 > 0$, 选取建议分布为 $E(1)$;

2).生成 $X \sim E(1)$;

3).若 $U < \frac{f(X)p(X_n)}{f(X_n)p(X)} = e^{X-X_n+\frac{1}{2}(X_n^2-X^2)}$, 则 $X_{n+1} = X$,

否则 $X_{n+1} = X_n$;

4). $n = n + 1$, 转2) .

```
N <- 8000
```

```
s <- c(1:N)
```

```
s[1] <- 7.3
```

```
i <- 1
```

```
# generate the chain
```

```
k <- 0
```

```
while(i <= N-1) {
```

```
  x <- rexp(1, rate=1)
```

```
  u <- runif(1)
```

```
  if (u < exp(x - x^2/2 - s[i] + s[i]^2/2)) {
```

```
    s[i + 1] <- x
```

```
    k <- k+1
```

```
  } else {
```

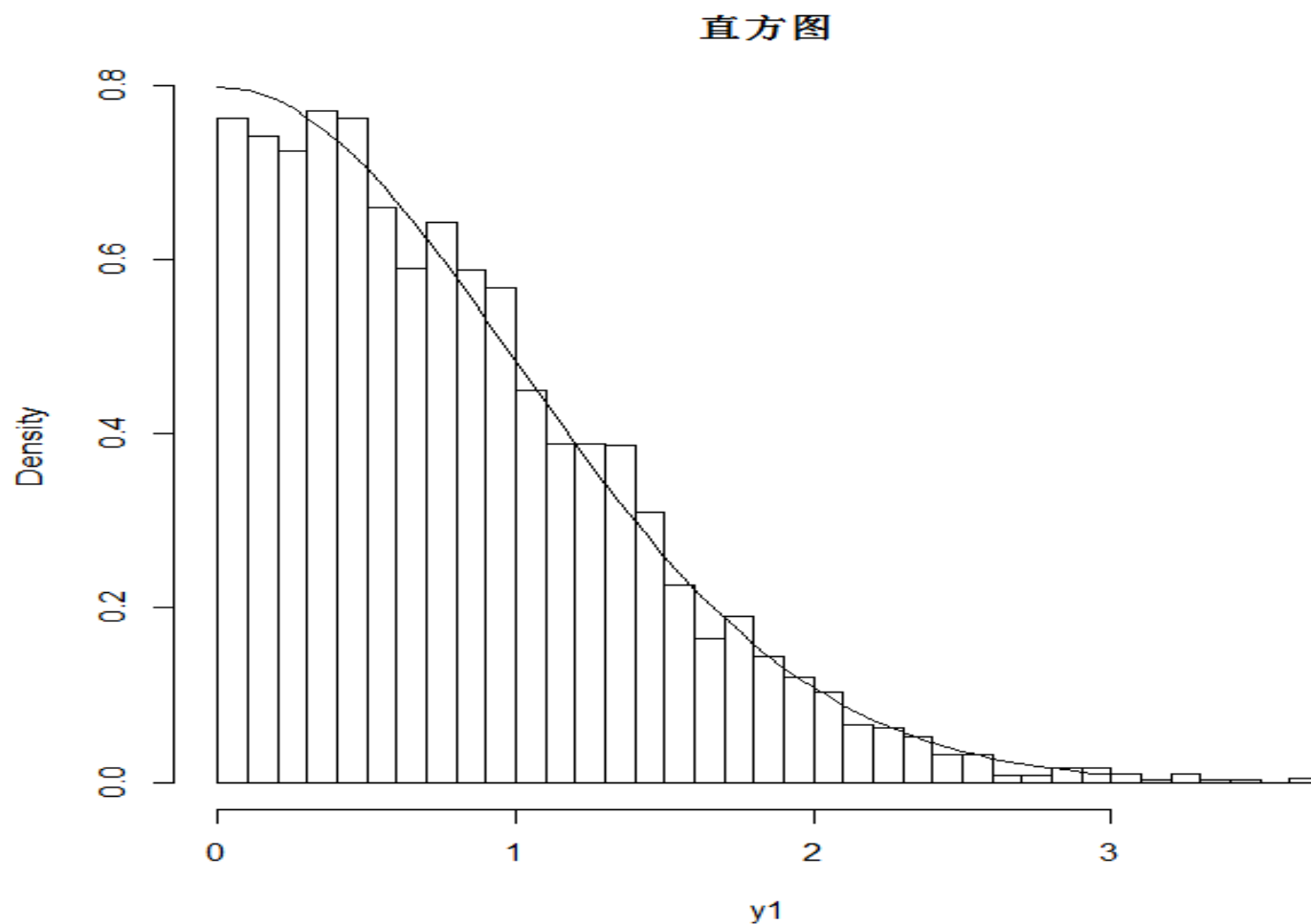
```
    s[i + 1] <- s[i]
```

```
  }
```

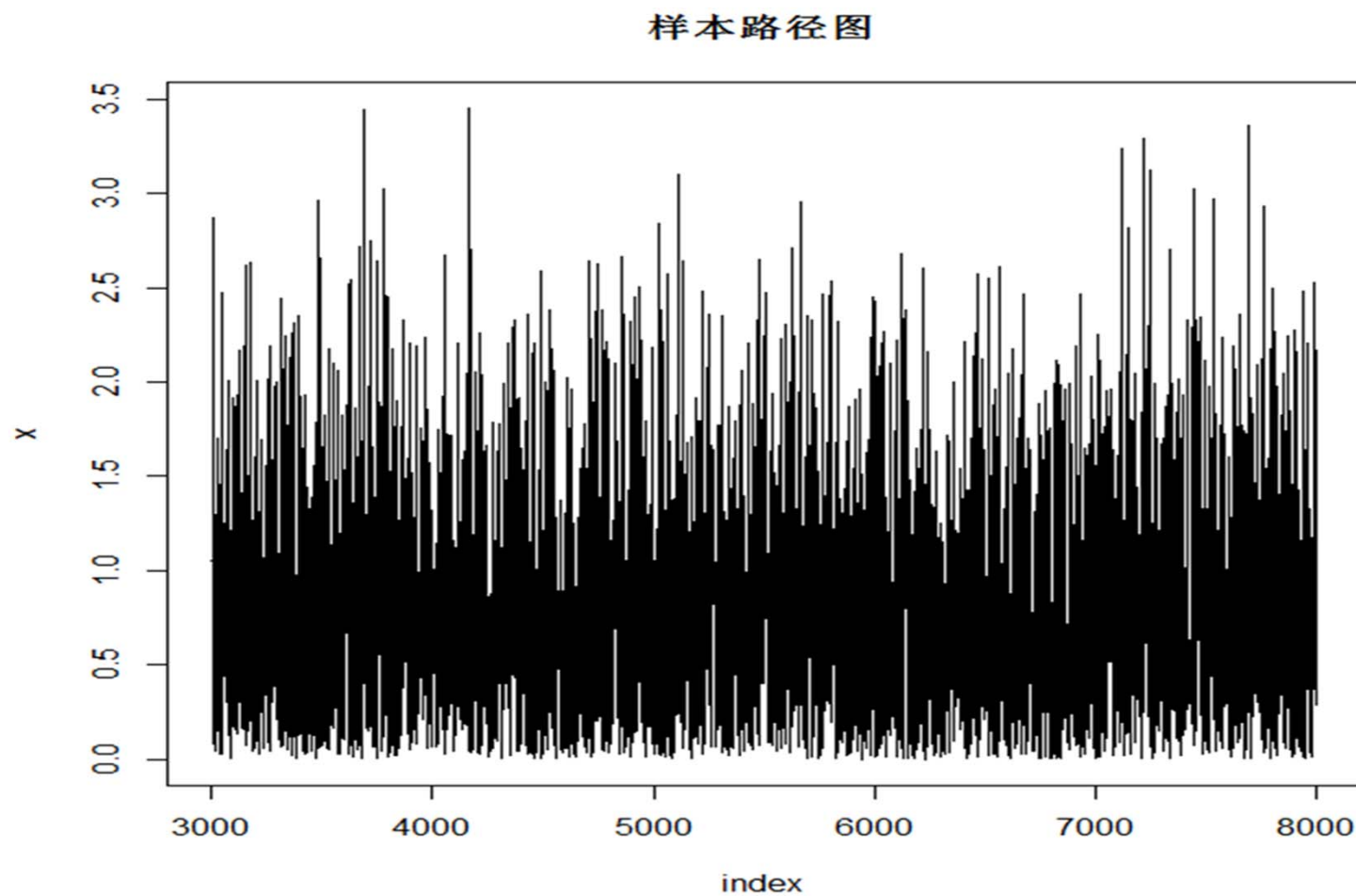
```
  i <- i+1
```

```
}
```

以下是用M-H算法（8000次模拟产生最后5000个数据）生成的随机数的直方图及密度函数曲线：



以下是用M-H算法（8000次模拟产生最后5000个数据）生成的随机数的样本路径图。样本路径在 f 的支撑域附近强烈地摆动，且不依赖于初始值。这说明马氏链的表现不错。



2.3.随机游走算法

令 $p(y|x)=h(y-x)$, 其中 h 为以原点为中心的均匀分布, 正态分布等。

此时 $\alpha(x, y)=\min\{\frac{f(y)}{f(x)}, 1\}$. 具体步骤如下:

- 1). 令 $n=0$, 任取 X_0 , 选取合适的分布 $h(x)$;
- 2). 生成 $X = X_n + \varepsilon$, 其中 $\varepsilon \sim h$;
- 3). 若 $U < \frac{f(X)}{f(X_n)}$, 则 $X_{n+1} = X$, 否则 $X_{n+1} = X_n$;
- 4). $n = n + 1$, 转2) .

注: 若 $f(x)$ 的支撑是连通的, 且 h 在0的领域内是正的, 则马氏链是非周期, 不可约的。

例：用随机游走算法产生标准正态分布

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

的随机数。

解：步骤如下：

1) . 令 $n=0$, 任取 X_0 , 选取 h 为 $N(0, \sigma^2)$;

2).生成 $X \sim N(X_n, \sigma^2)$;

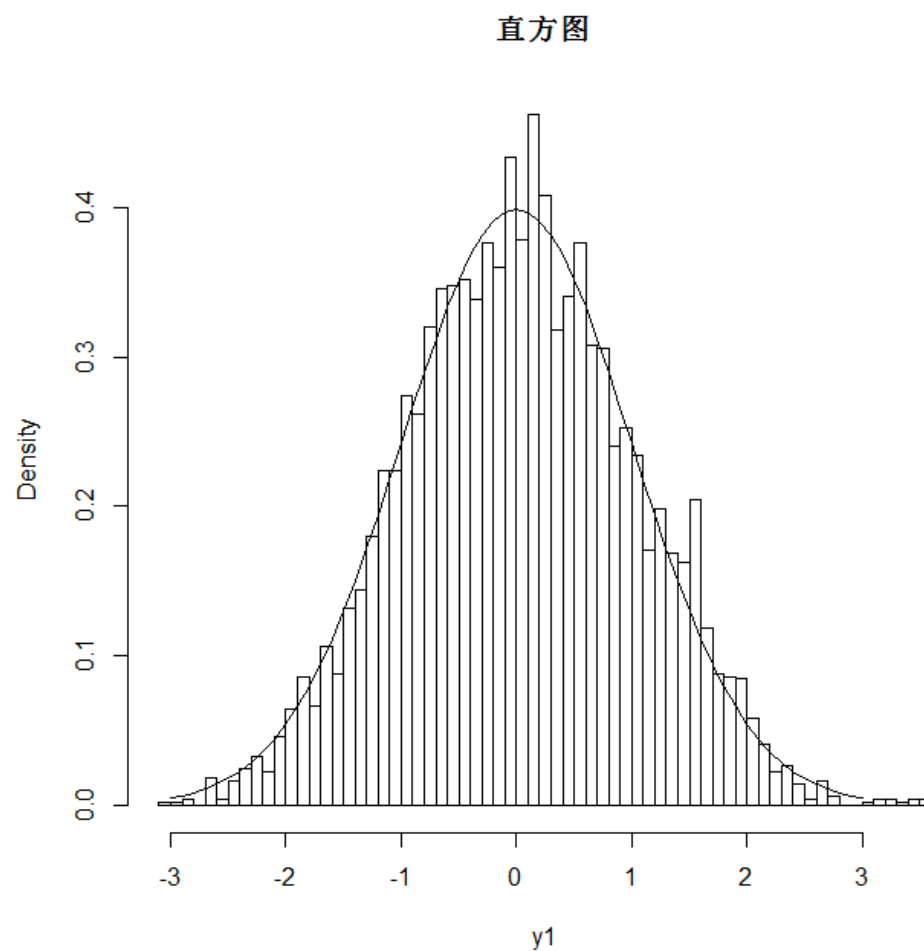
3).若 $U < \frac{f(X)}{f(X_n)} = e^{\frac{1}{2}(X_n^2 - X^2)}$, 则 $X_{n+1} = X$,

否则 $X_{n+1} = X_n$;

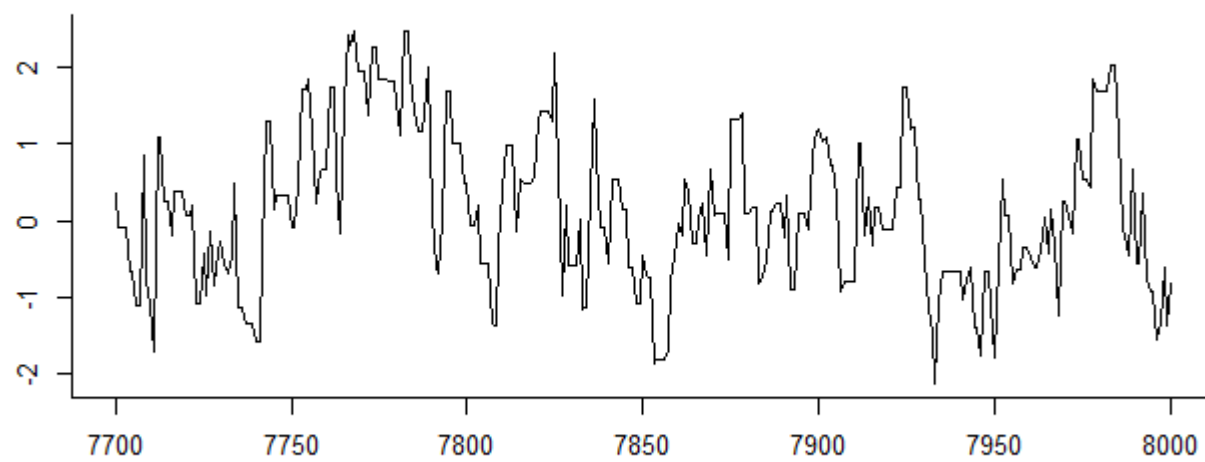
4). $n = n + 1$, 转2) .

```
N <- 8000
s <- c(1:N)
s[1] <- 7.3
i <- 1
k <- 0
for(i in 1:N) {
  x <- rnorm(1, mean=s[i], sd=1)
  u <- runif(1)
  if (u < exp(-x^2/2+s[i]^2/2)) {
    s[i + 1] <- x
    k <- k+1
  } else {
    s[i + 1] <- s[i]
  }
}
print(k/N)
index <- 7700:8000
y1 <- s[index]
```

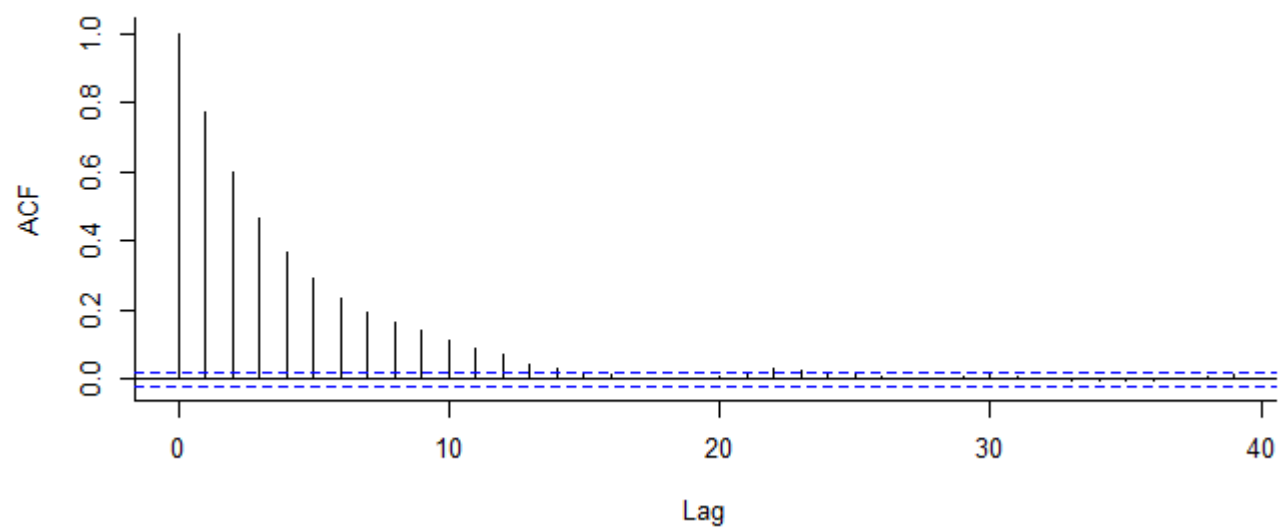
以下是用随机游走算法（ $\sigma=1$, 8000次模拟产生最后5000个数据）生成的随机数的直方图及密度函数曲线，样本路径图(后300个数据)以及样本自相关系数图。样本自相关系数随着步长迅速减少，这些均说明马氏链的表现不错。接受率=71%



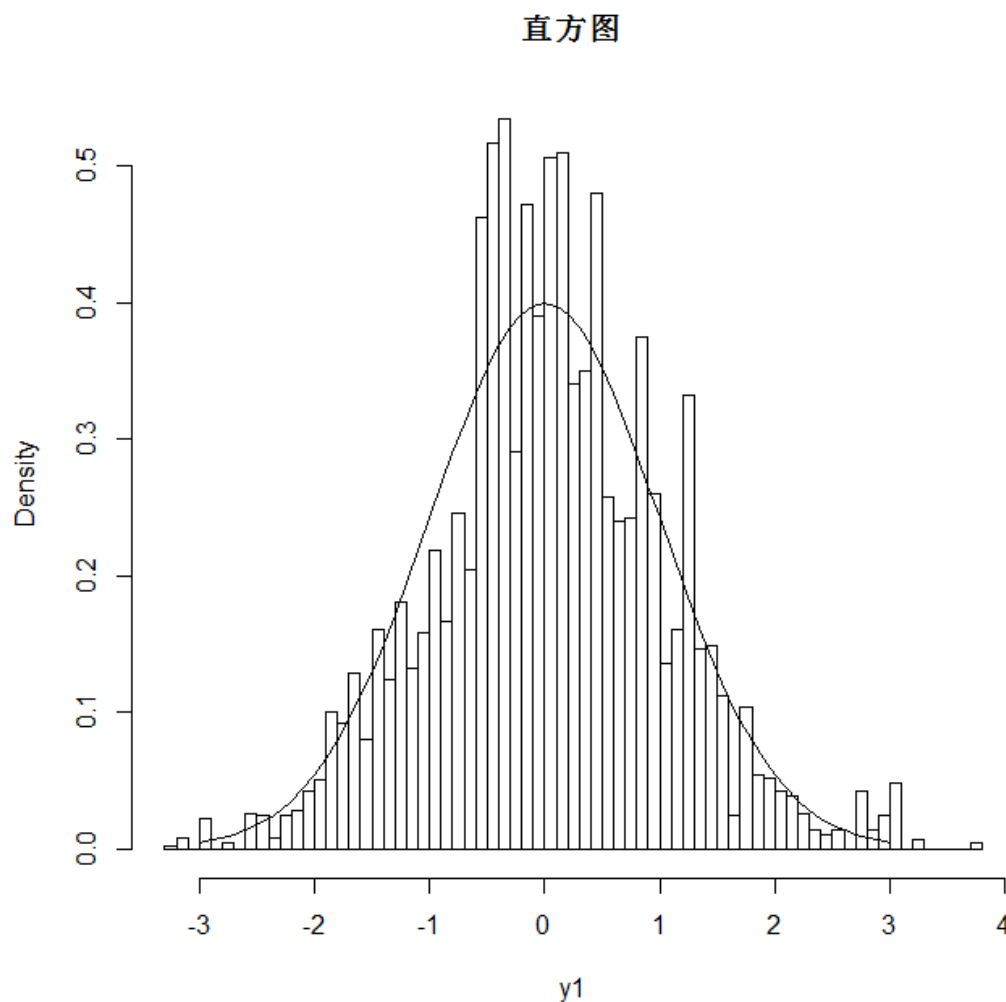
样本路径图



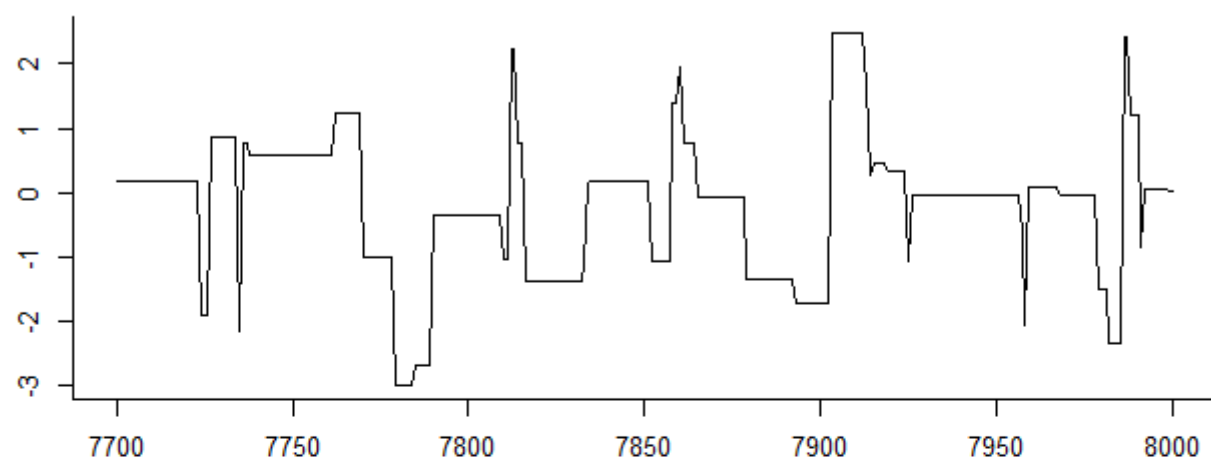
样本自相关图



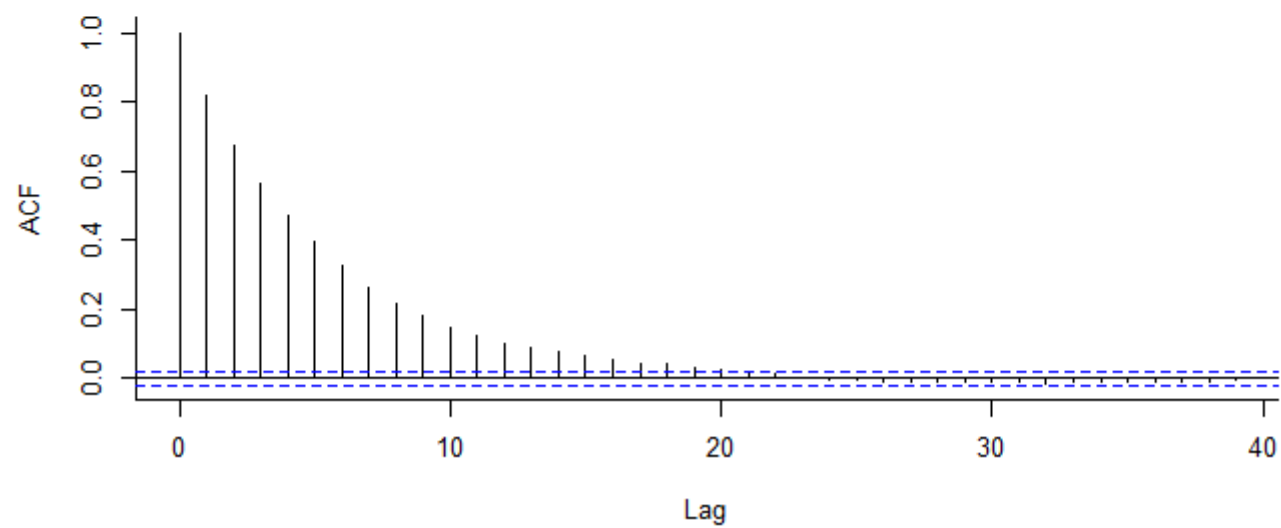
以下是用随机游走算法（ $\sigma=10$, 8000次模拟产生最后5000个数据）生成的随机数的直方图及密度函数曲线，样本路径图(后300个数据)，接受率=12.7%。收敛效果不好。（方差太大，导致马氏链转移很慢，收敛速度下降）



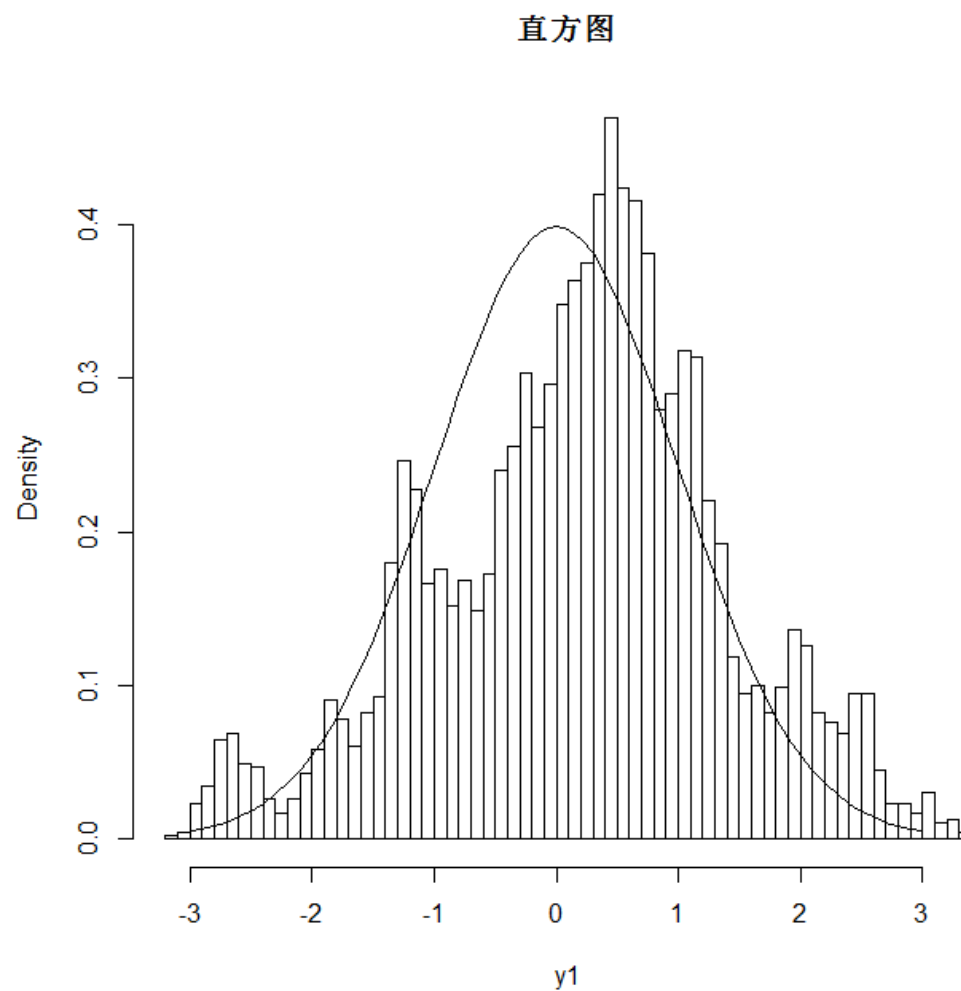
样本路径图



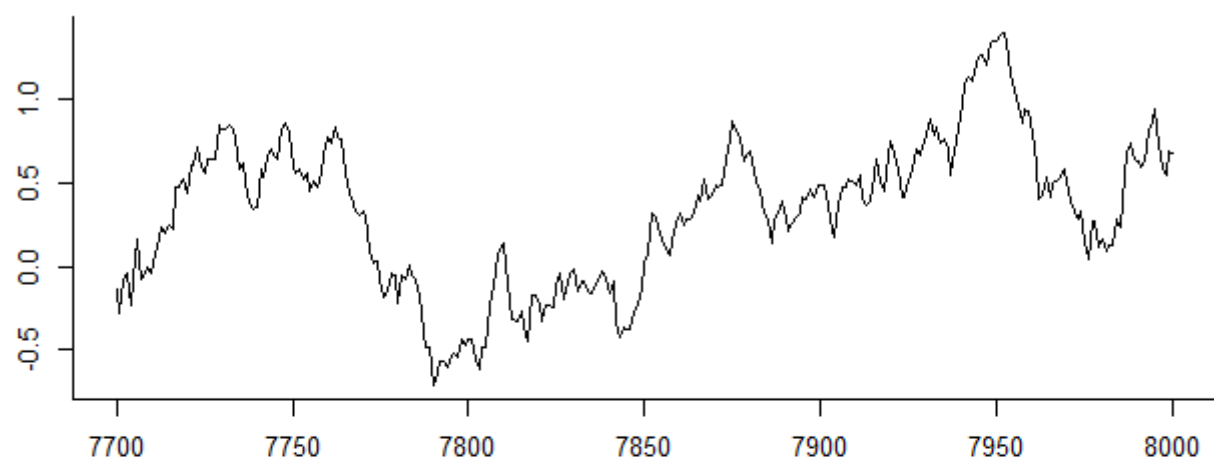
样本自相关图



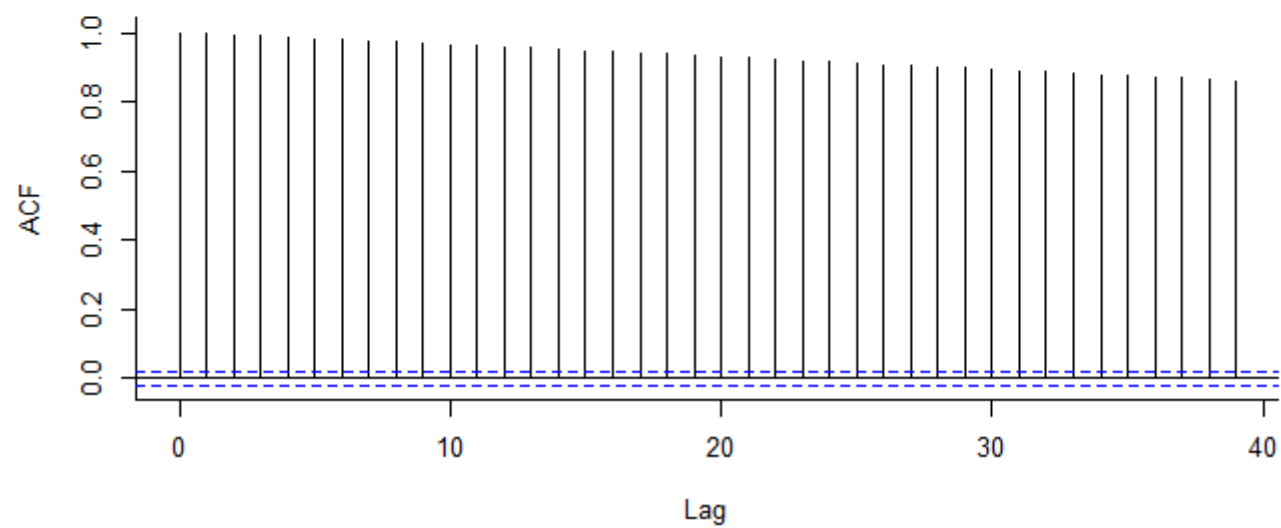
以下是用随机游走算法（ $\sigma=0.1$, 8000次模拟产生最后5000个数据）生成的随机数的直方图及密度函数曲线，样本路径图(后300个数据)，以及样本自相关系数图。样本自相关系数随着步长减少缓慢。接受率=96%。收敛效果不好。（方差太小，导致马氏链变为随机游走，效率同样不高）



样本路径图



样本自相关图



三.Gibbs抽样

M-H算法的一个重要应用是**Gibbs**抽样产生多维分布。

设 $X = (X_1, X_2, \dots, X_p) \sim f$, 且 f 的条件分布可以模拟产生。

则Gibbs抽样步骤如下:

1) . 令 $n=0$, 任取 $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_p^{(0)})$;

2). 逐个生成: $x_1^{(n+1)} \sim f(\cdot | x_2^{(n)}, \dots, x_p^{(n)})$;

$$x_2^{(n+1)} \sim f(\cdot | x_1^{(n+1)}, x_3^{(n)}, \dots, x_p^{(n)});$$

...

$$x_p^{(n+1)} \sim f(\cdot | x_1^{(n+1)}, \dots, x_{p-1}^{(n+1)});$$

3). 令 $X^{(n+1)} = (x_1^{(n+1)}, x_2^{(n+1)}, \dots, x_p^{(n+1)})$, $n = n + 1$, 转2) .

注1: Gibbs抽样可以看作M-H算法的特例。它的M-H比率为:

$$\alpha(X^{(n)}, X) = \min \left\{ \frac{f(X)p(X^{(n)} | X)}{f(X^{(n)})p(X | X^{(n)})}, 1 \right\} = \min \left\{ \frac{f(x_1^{(n)}, \dots, x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n+1)}, x_{i+1}^{(n)}, \dots, x_p^{(n)}) f(x_i^{(n)} | x_1^{(n)}, \dots, x_{i-1}^{(n)}, x_{i+1}^{(n)}, \dots, x_p^{(n)})}{f(x_1^{(n)}, \dots, x_p^{(n)}) f(x_i^{(n+1)} | x_1^{(n)}, \dots, x_{i-1}^{(n)}, x_{i+1}^{(n)}, \dots, x_p^{(n)})}, 1 \right\} = 1,$$

其中 $X^{(n)} = (x_1^{(n)}, \dots, x_p^{(n)})$, $X = (x_1^{(n)}, \dots, x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n+1)}, x_{i+1}^{(n)}, \dots, x_p^{(n)})$.

也就是说，每次生成的变量都作为下一个状态。

注2: Gibbs抽样也可以采取随机替换, 而不必逐个替换。
具体如下:

- 1) . 令 $n=0$, 任取 $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_p^{(0)})$;
- 2).生成随机数 U , 令 $i=[Up+1]$. 然后对第 i 个变量进行替换: $x_i^{(n+1)} \sim f(\cdot | x_1^{(n)}, \dots, x_{i-1}^{(n)}, x_{i+1}^{(n)}, \dots, x_p^{(n)})$
- 3).令 $X^{(n+1)} = (x_1^{(n)}, \dots, x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n+1)}, x_{i+1}^{(n)}, \dots, x_p^{(n)})$, $n = n + 1$, 转2) .

注3: Gibbs抽样还可以分组进行替换。以 $p=4$ 为例:

1) . 令 $n=0$, 任取 $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, x_4^{(0)})$;

2). 分组生成: $x_1^{(n+1)} \sim f(\cdot | x_2^{(n)}, x_3^{(n)}, x_4^{(n)})$;

$$(x_2^{(n+1)}, x_3^{(n+1)}) \sim f(\cdot | x_1^{(n+1)}, x_4^{(n)});$$

$$x_4^{(n+1)} \sim f(\cdot | x_1^{(n+1)}, x_2^{(n+1)}, x_3^{(n+1)});$$

3). 令 $X^{(n+1)} = (x_1^{(n+1)}, x_2^{(n+1)}, x_3^{(n+1)}, x_p^{(n+1)})$, $n = n + 1$, 转2) .

例： 试生成二维正态分布

$$(X_1, X_2) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$$

的随机数。

解： 首先：

$$f(x_1 | x_2) \sim N(\mu_1 + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (x_2 - \mu_2), (1 - \rho^2) \sigma_1^2);$$

$$f(x_2 | x_1) \sim N(\mu_2 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (x_1 - \mu_1), (1 - \rho^2) \sigma_2^2);.$$

```

N <- 5000          #length of chain
burn <- 1000       #burn-in length
X <- matrix(0, N, 2) #the chain, a bivariate sample
rho <- -0.5        #correlation
mu1 <- 0
mu2 <- 0
sigma1 <- 2
sigma2 <- 1
s1 <- sqrt(1-rho^2)*sigma1
s2 <- sqrt(1-rho^2)*sigma2

##### generate the chain #####

X[1, ] <- c(mu1, mu2)    #initialize

for (i in 2:N) {
  x2 <- X[i-1, 2]
  m1 <- mu1 + rho * (x2 - mu2) * sigma1/sigma2
  X[i, 1] <- rnorm(1, m1, s1)
  x1 <- X[i, 1]
  m2 <- mu2 + rho * (x1 - mu1) * sigma2/sigma1
  X[i, 2] <- rnorm(1, m2, s2)
}
b <- burn + 1
x <- X[b:N, ]

```

Gibbs抽样步骤如下：

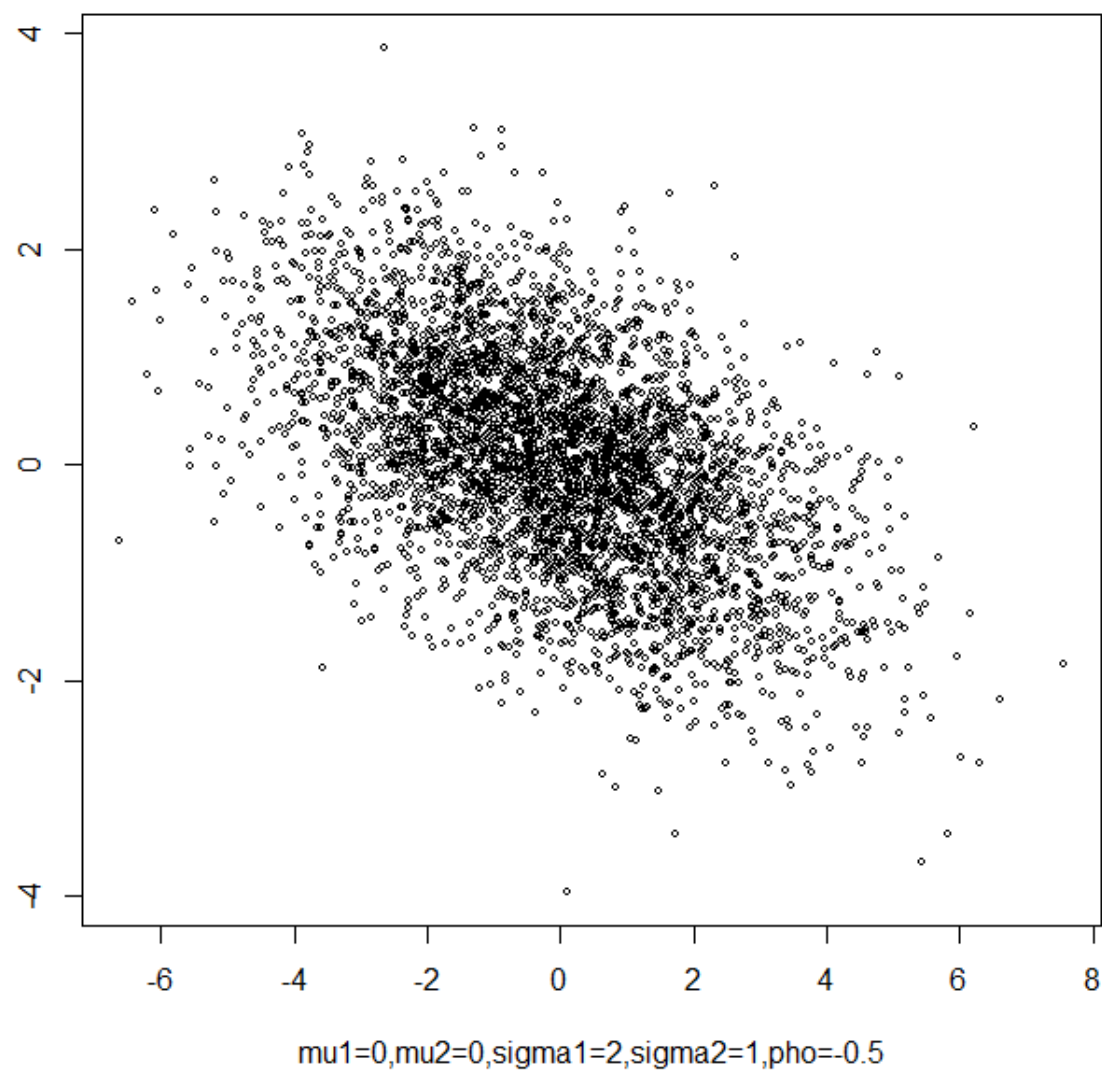
1) . 令 $n=0$, 任取 $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$;

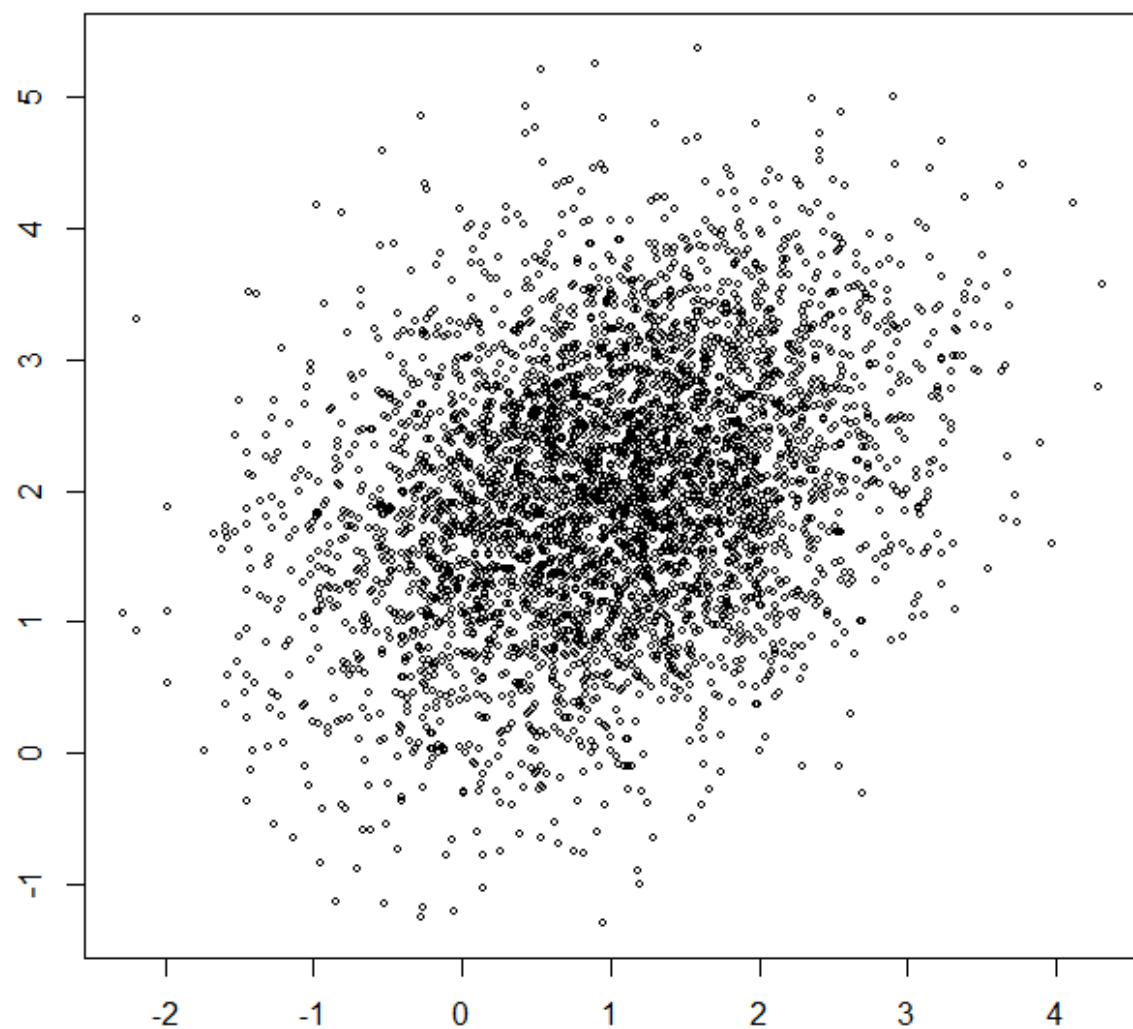
2). 逐个生成: $x_1^{(n+1)} \sim N(\mu_1 + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (x_2^{(n)} - \mu_2), (1 - \rho^2) \sigma_1^2)$;

$$x_2^{(n+1)} \sim N(\mu_2 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (x_1^{(n+1)} - \mu_1), (1 - \rho^2) \sigma_2^2);$$

3). 令 $X^{(n+1)} = (x_1^{(n+1)}, x_2^{(n+1)})$, $n = n + 1$, 转2) .

模拟计算结果如下：





$\mu_1=1, \mu_2=1, \sigma_1=1, \sigma_2=1, \rho=0.3$

例：试生成随机向量

$$(X, Y, Z) \sim f(x, y, z) \propto \exp\{-(x+y+z+axy+bxz+cyz)\}$$

的随机数，其中 a, b, c 为已知非负常数。并在 $a=b=c=1$ 的情况下计算 $E[XYZ]$ 。

解：不难看出

$$f(x|y, z) = E(1 + ay + bz);$$

$$f(y|x, z) = E(1 + ax + cz);$$

$$f(z|x, y) = E(1 + bx + cy).$$

Gibbs抽样步骤如下:

1) . 令 $n=0$, 任取 $(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)})$ 满足 $x^{(0)} > 0, y^{(0)} > 0, z^{(0)} > 0$;

2). 逐个生成: $x^{(n+1)} \sim E(1 + ay^{(n)} + bz^{(n)});$

$$y^{(n+1)} \sim E(1 + ax^{(n+1)} + cz^{(n)});$$

$$z^{(n+1)} \sim E(1 + ax^{(n+1)} + cy^{(n+1)});$$

3). 令 $X^{(n+1)} = (x^{(n+1)}, y^{(n+1)}, z^{(n+1)}), n = n + 1$, 转2) ;

4). 取适当的 m, n , 计算 $E[XYZ] \approx \frac{1}{n-m} \sum_{i=m+1}^n x^{(i)} y^{(i)} z^{(i)}$ 。

取 $n = 20000, m = 15000$, 模拟结果为 $E[XYZ] \approx 0.08684$ 。

```

N <- 5000          #length of chain
burn <- 3000       #burn-in length
X <- matrix(0, N, 3) #the chain
a <- 1            #parameters
b <- 1
c <- 1

##### generate the chain #####

X[1, ] <- c(a,b,c)    #initialize

for (i in 2:N) {
  x2 <- X[i-1, 2]
  x3 <- X[i-1, 3]
  X[i, 1] <- rexp(1, rate = 1 + a * x2 + b * x3)
  x1 <- X[i, 1]
  X[i, 2] <- rexp(1, rate = 1 + a * x1 + c * x3)
  x2 <- X[i, 2]
  X[i, 3] <- rexp(1, rate = 1 + b * x1 + c * x2)
}
b <- burn + 1
index <- b:N

```

例题： 已知前半赛季两名最好的击球员邦兹和格里非本垒打的次数分别为**25**次和**18**次。现需预测他们在全赛季击出的本垒打的平均值。

建模： 第一步： 设邦兹在赛季前**100t%**的赛程本垒打次数为 $N_1(t)$, 格里非在赛季前**100t%**的赛程本垒打次数为 $N_2(t)$ 。可以将它们看作两个随机过程。

先假设 $\{N_1(t), t \geq 0\}$, $\{N_2(t), t \geq 0\}$ 为两个独立泊松过程, 参数为 λ_1, λ_2 .

Poisson 过程

定义1.计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 称为参数 λ 的Poisson过程, 若

- 1). $N(0)=0$;
- 2). 独立增量;
- 3). 对任意 $s, t > 0, N(t+s)-N(s) \sim P(\lambda t)$.

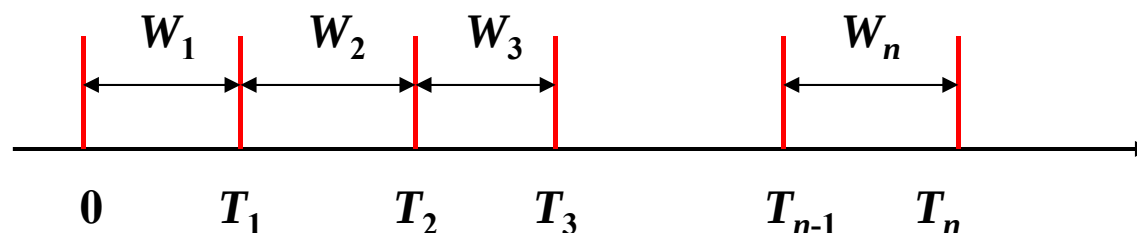
等价定义:

定义1'.计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 称为参数 λ 的Poisson过程, 若

- 1). $N(0)=0$;
- 2). 独立增量;
- 3). 对任意 $t > 0, P(N(t+h)-N(t)=1) = \lambda h + o(h)$;
 $P(N(t+h)-N(t) \geq 2) = o(h)$.

强度

普通性



第二步. 上述模型较为简单，下面运用分层贝叶斯方法进一步建模，得到较为复杂的模型。考虑到两球员的本垒打数是相关的，且参数 λ_1, λ_2 是未知的，假定 λ_1, λ_2 是参数为 Y 的独立指数随机变量，且 $Y \sim U[0.02, 0.10]$.

需要指出的是：上面 Y 的分布在贝叶斯统计中称为先验分布，它是由以往的经验及专家意见得出的。例如 $Y=0.02$ 时， λ_1 的平均值为50，这可以看作赛季平均本垒打次数为50次。

由上述模型知：

1. $Y \sim U[0.02, 0.10]$;

2. 给定 $Y = y, \lambda_i \sim E(y), i = 1, 2$;

3. 给定 $\lambda_1, \lambda_2, \{N_1(t), t \geq 0\}, \{N_2(t), t \geq 0\}$ 为两个强度为 λ_1, λ_2 的独立泊松过程.

现要求条件期望 $E[N_1(1) | N_1(0.5) = 25, N_2(0.5) = 18]$ 和 $E[N_2(1) | N_1(0.5) = 25, N_2(0.5) = 18]$.

因为

$$E[N_1(1) | N_1(0.5) = 25, N_2(0.5) = 18, \lambda_1] = 25 + 0.5\lambda_1$$

故

$$\begin{aligned} E[N_1(1) | N_1(0.5) = 25, N_2(0.5) = 18] &= \\ E\{E[N_1(1) | N_1(0.5) = 25, N_2(0.5) = 18, \lambda_1] | N_1(0.5) = 25, N_2(0.5) = 18\} &= \\ = E[25 + 0.5\lambda_1 | N_1(0.5) = 25, N_2(0.5) = 18] &= 25 + \\ 0.5E[\lambda_1 | N_1(0.5) = 25, N_2(0.5) = 18]. \end{aligned}$$

同理有

$$E[N_2(1) | N_1(0.5) = 25, N_2(0.5) = 18] = 18 + 0.5E[\lambda_2 | N_1(0.5) = 25, N_2(0.5) = 18].$$

因此问题归结为求：

$$E[\lambda_1 | N_1(0.5) = 25, N_2(0.5) = 18] \text{ 和 } E[\lambda_2 | N_1(0.5) = 25, N_2(0.5) = 18].$$

考虑到上面的条件期望 $E[\lambda_1 | N_1(0.5) = 25, N_2(0.5) = 18]$ 和 $E[\lambda_2 | N_1(0.5) = 25, N_2(0.5) = 18]$ 不易直接计算，我们可以用模拟的方法产生服从条件分布 $(y, \lambda_1, \lambda_2) | N_1(0.5) = 25, N_2(0.5) = 18$ 的随机数 $(y^{(n)}, \lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)})$ ，然后计算 $\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}$ 的平均值即可。

上述条件分布为多元分布，直接模拟有一定难度。
而Gibbs抽样正是为解决这类问题设计的。

其基本思想如下：

1) . 令 $n=0$, 任取 $(y^{(0)}, \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)})$;

2). 逐个生成: $y^{(n+1)} \sim f(\cdot | \lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)})$;

$$\lambda_1^{(n+1)} \sim f(\cdot | y^{(n+1)}, \lambda_2^{(n)});$$

$$\lambda_2^{(n+1)} \sim f(\cdot | y^{(n+1)}, \lambda_1^{(n+1)});$$

3). 得 $(y^{(n+1)}, \lambda_1^{(n+1)}, \lambda_2^{(n+1)})$, $n = n + 1$, 转2) .

可以计算得

$$f(y | \lambda_1, \lambda_2, N_1(0.5) = 25, N_2(0.5) = 18) \propto y^2 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)y} I\{0.02 < y < 0.1\}$$

$$f(\lambda_1 | y, \lambda_2, N_1(0.5) = 25, N_2(0.5) = 18) \propto \lambda_1^{25} e^{-(y+1/2)\lambda_1} I\{\lambda_1 > 0\} = \Gamma(26, y + 1/2)$$

$$f(\lambda_2 | y, \lambda_1, N_1(0.5) = 25, N_2(0.5) = 18) \propto \lambda_2^{18} e^{-(y+1/2)\lambda_2} I\{\lambda_2 > 0\} = \Gamma(19, y + 1/2)$$

上述分布均不复杂，容易模拟生成。

Gibbs抽样步骤如下：

1) . 令 $n=0$, 任取 $(y^{(0)}, \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)})$;

2). 逐个生成: $y^{(n+1)} \sim y^2 e^{-(\lambda_1^{(n)} + \lambda_2^{(n)})y} I\{0.02 < y < 0.1\}$;

$$\lambda_1^{(n+1)} \sim \Gamma(26, y^{(n+1)} + 1/2);$$

$$\lambda_2^{(n+1)} \sim \Gamma(19, y^{(n+1)} + 1/2);$$

3).令 $n = n + 1$, 转2) ;

4).取适当的 m, n ,

$$\text{计算 } \frac{1}{n-m} \sum_{i=m+1}^n \lambda_j^{(i)} \approx E[\lambda_j \mid N_1(0.5) = 25, N_2(0.5) = 18], j = 1, 2.$$

Gibbs抽样模拟得到（10000次模拟用后面5000个数据）：

$$E[\lambda_1 \mid N_1(0.5) = 25, N_2(0.5) = 18] \approx 48.32;$$

$$E[N_1(1) \mid N_1(0.5) = 25, N_2(0.5) = 18] \approx 49.16;$$

$$E[\lambda_2 \mid N_1(0.5) = 25, N_2(0.5) = 18] \approx 35.20;$$

$$E[N_2(1) \mid N_1(0.5) = 25, N_2(0.5) = 18] \approx 35.60.$$

以下是用**Gibbs**抽样（10000次模拟产生后面5000个数据，前面5000个数据一般称为预烧期）生成的随机数 $\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}$ 的样本路径图。左图为 $\lambda_1^{(n)}$ 的样本路径图，右图为 $\lambda_2^{(n)}$ 的样本路径图。样本路径在 $\mathbf{f}$ 的支撑域附近强烈地摆动，且不依赖于初始值。这说明马氏链的表现不错。

