抢渡长江最优路径的讨论

孔敏
mkong@nju.edu.cn

南京大学数学系

July 2018

摘要

本文给出了2003 年全国大学生数学建模竞赛 D 题的一种求解方法. 运用拉格朗日乘数法与变分法建立了水速变化时最优路径适合的方程. 特别针对问题4, 当水流速度呈线性变化时, 导出了求解最优解的函数方程.

问题的提出

“渡江” 是武汉城市的一张名片. 1934年9月9日, 武汉警备旅官兵与体育界人士联手, 在武汉第一次举办横渡长江游泳竞赛活动, 起点为武昌汉阳门码头, 终点设在汉口三北码头, 全程约5000 米. 有44 人参加横渡, 40 人达到终点, 张学良将军特意向冠军获得者赠送了一块银盾, 上书“力挽狂澜”.

2001年, “武汉抢渡长江挑战赛” 重现江城. 2002年, 正式命名为“武汉国际抢渡长江挑战赛”, 于每年的5月1日进行. 由于水情、水性的不可预测性, 这种竞赛更富有挑战性和观赏性.

2002年5月1日, 抢渡的起点设在武昌汉阳门码头, 终点设在汉阳南岸咀, 江面宽约1160米. 据报载, 当日的平均水温$16.8°C$, 江水的平均流速为1.89米/秒. 参赛的国内外选手共186 人(其中专业人员将近一半), 仅34人到达终点, 第一名的成绩为14分8秒. 除了气象条件外, 大部分选手由于路线选择错误, 被滚滚的江水冲到下游, 而未能准确到达终点.

假设在竞渡区域两岸为平行直线，它们之间的垂直距离为1160米，从武昌汉阳门的正对岸到汉阳南岸咀的距离为1000米，见图1.

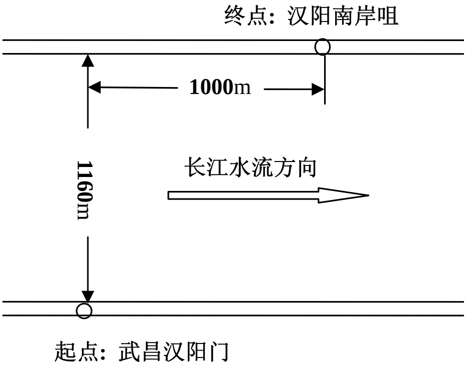


Figure: 图1 渡江示意图

请你们通过数学建模来分析上述情况, 并回答以下问题:

(1) 假定在竞渡过程中游泳者的速度大小和方向不变, 且竞渡区域每点的流速均为1.89 米/秒, 试说明2002年第一名是沿着怎样的路线前进的, 求她游泳速度的大小和方向. 如何根据游泳者自己的速度选择游泳方向, 试为一个速度能保持在1.5米/秒的人选择游泳方向, 并估计他的成绩.

(2) 在(1)的假设下, 如果游泳者始终以和岸边垂直的方向游, 他(她)们能否到达终点? 根据你们的数学模型说明为什么1934年和2002年能游到终点的人数的百分比有如此大的差别, 给出能够成功到达终点的选手的条件.

(3) 若流速沿离岸边距离的分布为(设从武昌汉阳门垂直向上为 y 轴正向):

$$v(y)=\begin{cases}1.47\ \text{米/秒}, & 0\ \text{米} \le y \le 200\ \text{米}\\ 2.11\ \text{米/秒}, & 200\ \text{米} < y < 960\ \text{米}\\ 1.47\ \text{米/秒}, & 960\ \text{米} \le y \le 1160\ \text{米}\end{cases}$$

游泳者的速度大小(1.5米/秒)仍全程保持不变, 试为他选择游泳方向和路线, 估计他的成绩.

(4) 若流速沿离岸边距离为连续分布, 例如

$$v(y)=\begin{cases}\dfrac{2.28}{200}y, & 0\ \le y \le 200\\ 2.28, & 200\ < y < 960\\ \dfrac{2.28}{200}(1160-y), & 960\ \le y \le 1160\end{cases}$$

或你们认为合适的连续分布, 如何处理这个问题.

(5) 用普通人能懂的语言, 给有意参加竞渡的游泳爱好者写一份竞渡策略的短文.

(6) 你们的模型还可能有什么其他的应用?

模型的建立

建立平面直角坐标系，取入水点为坐标原点，x 轴与南岸重合，指向东，y 轴与南岸线垂直，终点 A 的坐标为 (L, H).

设游泳参赛者(以下简称人)在时刻 t 位于点 $P(x(t), y(t))$, $0 \leq t \leq T$(其中 T 为参赛者游泳所用的总时间). 时间 t 的单位为秒，x 与 y 的单位为米. 在点 P 处人游泳的速度为 $\vec{u} = (u\cos\theta, u\sin\theta)$，其中 θ 为 $\vec{u}$ 与 x 轴正向的夹角，$0 < \theta < 180°$，u 为常数. 水的速度为 $\vec{v} = (v, 0)$，这里 v 是点 P 纵坐标 y 的已知函数. 人运动的合速度为 $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ (参见图2). 本问题是依据所给的不同条件，求一条从 O 点到 A 点的最优路径，使总的游泳时间 T 取最小值.

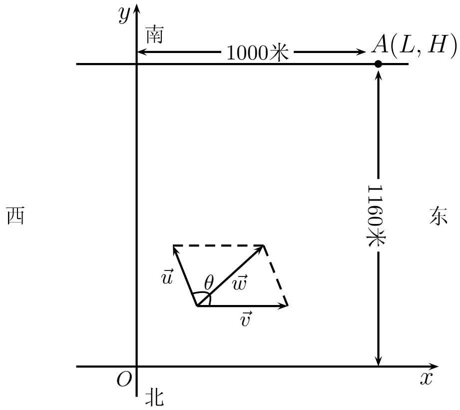


Figure: 图2

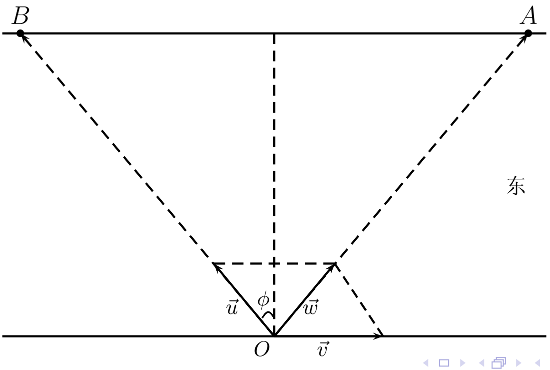
考虑到 θ 一般在 90° 到 180° 之间, 人在水中常常以终点或对岸某建筑物为参照, 为方便起见, 令 $\phi = \theta - 90^\circ$, 称 ϕ 为人的运动偏角, 简称偏角.

我们先证明下述引理:

Lemma 3.1

若 v 为常数, 则偏角 ϕ 不变, 且最优路径就是线段 $\overline{OA}$.

证明 由问题的实际意义，本问题对所给条件必存在最短时间 $T_{\min}$，以下记 $T_0 = T_{\min}$. 由相对运动原理，以水为参照系，设想从人入水时刻起，水流相对静止，而终点 A 以相反速度 v 自东向西匀速运动. 至时刻 T_0 时，A 向西移动到 B 点(参见图3). $\overline{AB} = vT_0$. 问题变成了求人在静水中从 O 点游到 B 点的最优路径. 而两点距离以线段为最短，于是人的最优路径是以 O 为起点，B 为终点的线段. 这表明偏角 ϕ 为常数. 回到实际问题中，由于 ϕ 不变，因此 $\vec{u}$ 为常向量. 于是合速度 $\vec{w}$ 也是常向量. 故最优路径就是线段 $\overline{OA}$. □

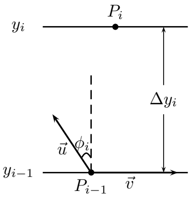


下面我们讨论较一般的情形.取分点

$$0 = y_0 < y_1 < \ldots, < y_n = H, \; \Delta y_i = y_i - y_{i-1} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

已知当$y_{i-1} < y < y_i$时, $v = v(y) = v_i$ 为常数. 直线 $y = y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ 将水域分成n 个条形区域. 设S 是从O 点到A 点的一条最优路径, 直线$y = y_i$ 与S 的交点为P_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$. 由引理3.1 可知, 在每一条形区域中人的运动偏角ϕ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ 不变.

易见, 人在第 i 个条形区域以偏角 ϕ_i, 游速为 u 游泳时, 其垂直分速度为 $u\cos\phi_i$, 水平分速度 $u\sin\phi_i$, 故人从 P_{i-1} 到 P_i 所化费的时间



$$\Delta t_i = \frac{\Delta y_i}{u\cos\phi_i}, \tag{3.1}$$

在 Δt_i 时间段中人被水流冲下的距离是

$$v_i \Delta t_i = \frac{v_i \Delta y_i}{u\cos\phi_i},$$

在 Δt_i 时间段中使人向上游移动的距离为

$$u\sin\phi_i \cdot \Delta t_i = u\sin\phi_i \cdot \frac{\Delta y_i}{u\cos\phi_i} = \Delta y_i \tan\phi_i,$$

在 Δt_i 时间段中人的水平方向上位移的距离为

$$v_i \Delta t_i - u\sin\phi_i \cdot \Delta t_i = \left(\frac{v_i}{u\cos\phi_i} - \tan\phi_i\right)\Delta y_i.$$

由于 A 点在下游 L 米处，于是有

$$T=\sum_{i=1}^{n}\Delta t_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta y_i}{u\cos\phi_i},$$

及

$$\sum_{i=1}^{n}\left(v_i\Delta t_i-\Delta y_i\tan\phi_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{v_i}{u\cos\phi_i}-\tan\phi_i\right)\Delta y_i=L. \tag{3.2}$$

因此我们的问题可化为求解

$$\begin{cases}\min & T=\sum_{i=1}^{n}\Delta t_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta y_i}{u\cos\phi_i}\\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{v_i}{u\cos\phi_i}-\tan\phi_i\right)\Delta y_i=L.\end{cases} \tag{3.3}$$

建立拉格朗日函数

$$
\begin{aligned}
F &= \sum_{i=1}^{n}\Delta t_i + \lambda\Big[\sum_{i=1}^{n}(v_i\Delta t_i - \Delta y_i\tan\phi_i) - L\Big] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta y_i}{u\cos\phi_i} + \lambda\Big[\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{v_i}{u\cos\phi_i} - \tan\phi_i\Big)\Delta y_i - L\Big]
\end{aligned}
$$

则有 $\dfrac{\partial F}{\partial\phi_i} = \sum_{i=1}^{n}\Big[\dfrac{\Delta y_i\sin\phi_i}{u\cos^2\phi_i} + \lambda\Big(\dfrac{v_i\sin\phi_i}{u\cos^2\phi_i} - \dfrac{1}{\cos^2\phi_i}\Big)\Delta y_i\Big],$

T 必在 F 的驻点处取得极值. 令 $\dfrac{\partial F}{\partial\phi_i} = 0$, 整理得

$$
\csc\phi_i - \frac{v_i}{u} = \frac{1}{\lambda u}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.4}
$$

因 F 关于 ϕ_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ 连续可微, 由拉格朗日乘数法原理知, (3.4) 式是使 T 取最小值的必要条件. 反之, 若 (3.4) 式成立, 由 (3.4) 能解得唯一的一组 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$, 则相应确定的一条游泳路径必是用时最少的最优路径.

注意到 (3.4) 式右端 λu 与 i 无关, 记 $C = \dfrac{1}{\lambda u}$, 以 ϕ 代替ϕ_i, v 代替 v_i, 我们对 v 取离散值时得到下述定理.

Theorem 3.2 (偏角定理)

设 S 是从起点 O 到终点 A 的一条游泳路径, ϕ 是 S 上任一点 P 处人的运动偏角, v 为 P 处水的水平速度, 人的速度 u 为常量, 若 S 为最优路径, 则存在常数 C, 使得等式

$$\csc\phi - \frac{v}{u} \equiv C\ (\text{常数}) \tag{3.5}$$

对 S 上任一点处均成立.

当 v 为 y 的连续变量时, 该结论依然成立. 下面我们用变分原理来证明.
当 v 取连续值时我们的问题化为求解

$$\begin{cases} \min \quad T = \displaystyle\int_0^H \frac{\mathrm{d}y}{u\cos\phi}, \\ \text{s.t.} \quad \displaystyle\int_0^H \left(\frac{v}{u\cos\phi} - \tan\phi\right)\mathrm{d}y = L. \end{cases}$$

令 $F(y,\phi) = \dfrac{1}{u\cos\phi} + \lambda\Big(\dfrac{v}{u\cos\phi} - \tan\phi\Big)$

作辅助泛函

$$J = \int_0^H F(y.\phi)\,\mathrm{d}y,$$

则极值曲线 $\phi = \phi(y)$ 满足欧拉方程 $F'_\phi - \dfrac{d}{dy}F'_{\phi'} = 0$, 因 F 中不含 ϕ', 故 $F'_{\phi'} = 0$, 于是

$$F'_\phi = \frac{\sin\phi}{u\cos^2\phi} + \lambda\Big(\frac{v\sin\phi}{u\cos^2\phi} - \frac{1}{\cos^2\phi}\Big) = 0,$$

化简即得 $\csc\phi - \dfrac{v}{u} = C, \quad \Big(C = \dfrac{1}{\lambda u}\Big).$

反之, 若 ϕ 满足上式, 这里 C 由约束条件确定, 则 ϕ 由 $v = v(y)$ 确定, 该曲线就是最优路径.

☞ 若 v 恒等于常数, 由 (3.5) 式知 ϕ 恒等于常数, 于是合速度 $\vec{w}$ 的方向不变, 最优路径一定是一条直线, 故引理3.1 是定理3.2 的特殊情形.

尽管 (3.5) 式中有尚未确定的常数 C, 但并不影响它在以下求解中所起的作用. 如果能确定入水时的偏角 α_0, 则 (3.5) 式可表述成下列形式:

$$\csc\phi - \csc\alpha_0 = \frac{v - v_0}{u} \tag{3.6}$$

这里 v_0 为岸边 $y = 0$处的水速. 于是可由上式求得任一时刻运动偏角 ϕ.

若 ϕ 取 n 个离散值, 则最优时间

$$T_{\min} = \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta y_i}{u \cos \phi_i} \tag{3.7}$$

若 ϕ 为连续变量, 则

$$T_{\min} = \int_0^H \frac{\mathrm{d}y}{u \cos \phi}.$$

问题的求解

以下我们回答D题所列的主要问题:

问题1 假定在竞渡过程中游泳者的速度大小和方向不变, 且竞渡区域每点的流速均为1.89 米/秒, 试说明2002年第一名是沿着怎样的路线前进的, 求她游泳速度的大小和方向. 如何根据游泳者自己的速度选择游泳方向, 试为一个速度能保持在1.5米/秒的人选择游泳方向, 并估计他的成绩.

解答 因$v = 1.89$米/秒为常数, 故偏角ϕ为常数, 由 (3.3) 我们有

$$\begin{cases} u\cos\phi \cdot T_{\min} = H, \\ vT_{\min} - u\sin\phi \cdot T_{\min} = L, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_{\min} = \dfrac{H}{u}\sec\phi, \\ vT_{\min} - H\tan\phi = L. \end{cases}$$

已知最优时间$T_{\min} = 848$ 秒, $L = 1000$ 米, $H = 1160$ 米, 则

$$\begin{cases} T_{\min} = \dfrac{1160}{u\cos\phi}, \\ 1.89T_{\min} - 1160\tan\phi = 1000. \end{cases}$$

计算得$\phi = 27.46°, u = 1.542$米/秒. 这就是2002年第一名选手的游泳方向与速度.

若 $u = 1.5$米/秒, $v = 1.89$米/秒, 同样由方程

$$\begin{cases} 1.5T = 1160\sec\phi, \\ 1.89T - 1160\tan\phi = 1000, \end{cases}$$

解得 $T_{\min} = 910.46$秒, $\phi = 31.85°$, 即当选手的偏角保持31.85°, 游速在$u = 1.5$米/秒时, 其用时为910.46秒可抵达终点, 显然这是一条用时最短的路径.

问题2

1. 当 $\phi = 0$, 即人以垂直于岸边方向游泳时, 设 L_0 为人的上岸处至起点正对岸处的距离, 则

$$\begin{cases} T_{\min} = \dfrac{H}{u}\sec\phi, \\ vT_{\min} - H\tan\phi = L, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_{\min} = \dfrac{H}{u}, \\ vT_{\min} = L, \end{cases} \Rightarrow L = \frac{v}{u}H.$$

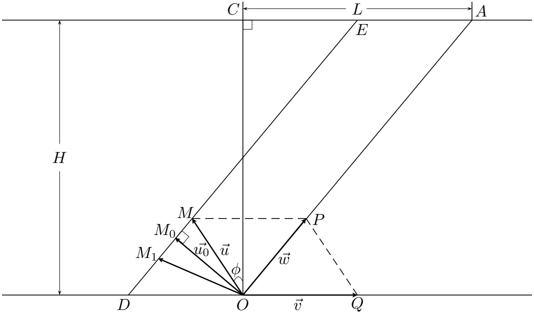
故

$$L_0 = \frac{v}{u}H = \frac{1.89}{1.5}\times 1160 = 1461.6(\text{米}) > 1000(\text{米}),$$

故在2002年人以1.5 (米/秒)速度垂直于岸边游向对岸不能到达终点.

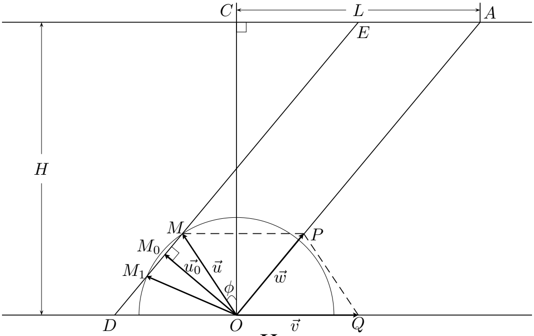
2. 我们来计算人能游到终点A处所需的最小速度u_0.

参见右图, 设$\overrightarrow{OM}=\vec{u}$, $\overrightarrow{OQ}=\vec{v}$, $\overrightarrow{OP}=\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$. 过$M$作$DM//OP$交对岸于$E$点. 于是有$OD=MP=OQ=v$. 显然当$\overrightarrow{OM}$的终点在$DE$上时才能直接游到$A$点, 故当$OM\perp DE$时, $u=|\overrightarrow{OM}|$取最小值u_0. 设$OM_0\perp DM$, 因$\triangle OM_0D\sim\triangle OCA$, 故



$$\frac{u_0}{v}=\frac{H}{\sqrt{H^2+L^2}} \quad\Rightarrow\quad u_0=\frac{Hv}{\sqrt{H^2+L^2}}. \tag{4.1}$$

设 $u_0 < u < v$, 以 O 为原点, 以 u 为半径画圆弧交 DE 于 M 和 M_1 两点(见右图), 这里 M_1 在 D 与 M 之间. 显然, 人按照 $\overrightarrow{OM}$ 方向游泳将获得最大的垂直方向的分速度, 能以最少时间游到 A 点. 此时, 不难求得运动偏角



$$\phi = \angle M_0OC - \angle M_0OM = \angle OAC - \angle M_0OM = \arctan\frac{H}{L} - \arccos\frac{u_0}{u}.$$

若人的游泳方向介于 $\overrightarrow{OM_1}$ 和 $\overrightarrow{OM}$ 方向之间他将在 A 点的上游某点处到达对岸.

由条件 $H = 1160, v = 1.89$. 在2002年, $L = 1000$ 米, 由 (4.1) 式可得

$$u_0 = \frac{1160 \times 1.89}{\sqrt{1160^2 + 1000^2}} = 1.432(米/秒)$$

即如果人的速度小于 1.432(米/秒), 他就不可能游到终点.

在1934年, $\sqrt{L^2 + H^2} = 5000$ 米, 于是

$$u_0 = \frac{1160 \times 1.89}{5000} = 0.438(米/秒)$$

即只要人的速度大于 0.438(米/秒), 选择适当的游泳方向他就可以游到终点. 这就是为什么1934年大部分参赛者均游到终点的原因.

问题3 由对称性, 考虑 $0 \le y \le 580$ 的情形(参见图 4). 设当 $0 \le y < 200$ 与 $200 < y \le 580$ 时, 偏角分别为 α_0 与 α_1, 水速分别为 v_0 与 v_1. 由公式 (3.6) 得

$$\csc\alpha_1 - \csc\alpha_0 = \frac{v_1 - v_0}{u} = \frac{2.11 - 1.47}{1.5}. \tag{4.2}$$

当水速 v 不变时, 由 (3.2) 式我们有 $H\Big(\dfrac{v}{u\cos\phi} - \tan\phi\Big) = L$, 于是有

$$200\Big(\frac{1.47}{1.5\cos\alpha_0} - \tan\alpha_0\Big) + 380\Big(\frac{2.11}{1.5\cos\alpha_1} - \tan\alpha_1\Big) = 500. \tag{4.3}$$

将(4.2), (4.3) 式联立可解得 $\alpha_0 = 36.056°, \alpha_1 = 28.063°$.

$\dfrac{1}{2}T_{\min} = \dfrac{200}{1.5\cos\alpha_0} + \dfrac{380}{1.5\cos\alpha_1} = 452.01$ 秒, $\quad\Rightarrow\quad T_{\min} = 904.02$ 秒.

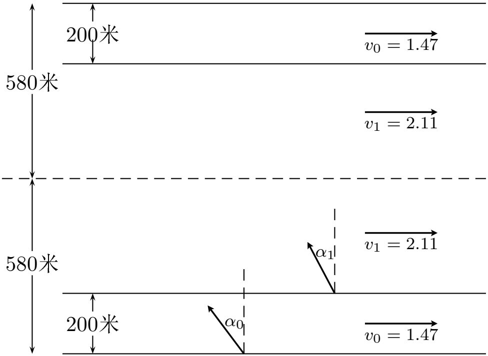


Figure: 图6

问题4 依题意，流速沿离岸边距离的分布为，

$$v(y) = \begin{cases} \dfrac{2.28}{200}y, & 0 \le y \le 200 \\ 2.28, & 200 < y < 960 \\ \dfrac{2.28}{200}(1160 - y), & 960 \le y \le 1160 \end{cases}$$

见图5.

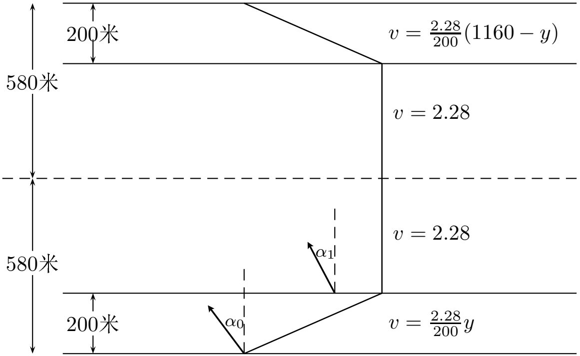

200米
580米
580米
200米
$v = \frac{2.28}{200}(1160 - y)$
$v = 2.28$
$v = 2.28$
$v = \frac{2.28}{200}y$
α_1
α_0

Figure: 图7

解法 1

由 (3.3) 我们有

$$\begin{cases} \min & T = \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta y_i}{u \cos\phi_i} \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{v_i}{u\cos\phi_i} - \tan\phi_i \right) \Delta y_i = 1000. \end{cases} \tag{4.4}$$

考虑到水速分布的对称性, 将 $[0, 200]$ n 等分.

当 $0 \le y < 200$ 时, 所用时间为

$$T_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta y_i}{u\cos\phi_i},$$

水平位移为

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{v_i}{u\cos\phi_i} - \tan\phi_i \right) \Delta y_i.$$

当 $200 \le y < 580$ 时, 所用时间为

$$T_2 = \frac{380}{u\cos\phi_n},$$

水平位移为

$$380\left(\frac{2.28}{u\cos\phi_n} - \tan\phi_n \right).$$

因此, 模型 (4.4) 可化简为

$$
\begin{cases}
\min & T = T_1 + T_2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\Delta y_i}{u\cos\phi_i} + \dfrac{380}{u\cos\phi_n} \\
\text{s.t.} & \sum\limits_{i=1}^{n} \Big(\dfrac{v_i}{u\cos\phi_i} - \tan\phi_i \Big) \Delta y_i \\
 & +380\Big(\dfrac{2.28}{u\cos\phi_n} - \tan\phi_n \Big) = 500,
\end{cases}
\tag{4.5}
$$

所用的总时间为 $T_{总} = 2 \times T$.
(4.5) 是一个带有约束的非线性最优化问题, 我们可以调用 MATLAB 软件中的“fmincon”进行求解.
一般而言, 求解非线性约束优化问题是比较困难的, 此类问题对初始点的要求较高, 所以最好能根据具体的情况, 将这类进行问题转化, 以便求解.

解法 2　由偏角定理3.2, 我们有

$$\csc\phi - \frac{v}{u} \equiv C, \ (\text{常数})$$

于是

$$\csc\phi_{i+1} - \frac{v_{i+1}}{u} = \csc\phi_i - \frac{v_i}{u},$$

故

$$\csc\phi_{i+1} = \csc\phi_i - \frac{v_i - v_{i+1}}{u}. \ (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4.6}$$

注意到(4.6)式中 u, v_i, v_{i+1} 均是已知的, 因此, 我们只要给定初始入水偏角 ϕ_1, 就可以有上式的递推关系得到一组偏角 $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$.

注意到(4.6)式中 u, v_i, v_{i+1} 均是已知的，因此，我们只要任意给定初始入水偏角 ϕ_1，就可以有上式的递推关系得到一组偏角 $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$. 将这组偏角代人

$$L_1 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{v_i}{u \cos \phi_i} - \tan \phi_i \right) \Delta y_i$$

所得到的 L_1 就是在给定的初始角 ϕ_1 条件下，人游到对岸时并用时最短的水平位移. 显然，最优初始入水角是

$$\min_{\phi_1} |L_1 - 1000|, \tag{4.7}$$

的解.

解法 3 设入水时 $t=0$, 运动偏角 $\phi=\alpha_0$. 当人的纵坐标 $y=200$米时, $t=t_1, \phi=\alpha_1$, 当 $y=580$米时, $t=t_2$.

先考虑 $0\le y<200$ 的情形.
将人所在位置 P 的纵坐标 y, 水速 v 及运动偏角 ϕ 均看作时间 t 的函数.
由 (3.1) 式及题设, 我们有

$$\mathrm{d}y = u\cos\phi\,\mathrm{d}t, \qquad \mathrm{d}v = k\,\mathrm{d}y,$$

这里 $k=\dfrac{2.28}{200}$, 故

$$\mathrm{d}v = ku\cos\phi\,\mathrm{d}t. \tag{4.8}$$

由公式 (3.6) 可得

$$\frac{1}{\sin\phi}-\frac{1}{\sin\alpha_0}=\frac{v}{u},$$

这里 α_0 与 u 为常数.

两边求微分得

$$\frac{-\cos\phi}{\sin^2\phi}\,\mathrm{d}\phi = \frac{\mathrm{d}v}{u}.$$

将 (4.8) 式代入上式, 整理得

$$\mathrm{d}t = \frac{-\mathrm{d}\phi}{k\sin^2\phi}. \tag{4.9}$$

两边积分, 则有

$$kt = \cot\phi + C.\ (\text{这里 } C \text{ 是积分常数}) \tag{4.10}$$

于是

$$t_1 = \int_0^{t_1}\mathrm{d}t = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\frac{-\mathrm{d}\phi}{k\sin^2\phi} = \frac{1}{k}(\cot\alpha_1 - \cot\alpha_0). \tag{4.11}$$

设 L_1 为从 $t=0$ 到 $t=t_1$ 人实际移动的水平距离, 则

$$L_1 = \int_0^{t_1} (v - u\sin\phi)\,\mathrm{d}t.$$

将 $v = u(\dfrac{1}{\sin\phi} - \dfrac{1}{\sin\alpha_0})$ 及(4.9)式代入上式作换元积分, 注意到当 $t=0$ 时 $\phi=\alpha_0$, 当 $t=t_1$ 时 $\phi=\alpha_1$, 于是

$$\begin{aligned} L_1 &= u\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\Big(\frac{1}{\sin\phi} - \frac{1}{\sin\alpha_0} - \sin\phi\Big)\frac{-\mathrm{d}\phi}{k\sin^2\phi} \\ &= \frac{u}{2k}\Big(\csc\alpha_0\cot\alpha_0 - 2\csc\alpha_0\cot\alpha_1 + \csc\alpha_1\cot\alpha_1 \\ &\quad + \ln\frac{\csc\alpha_1 - \cot\alpha_1}{\csc\alpha_0 - \cot\alpha_0}\Big). \end{aligned}$$

再考虑 $200 < y \leq 580$ 的情形. 设 L_2 为从 $t = t_1$ 到 $t = t_2$ 人实际移动的水平距离, 于是此时偏角 ϕ 恒等于 α_1

$$L_2 = 380\Big(\frac{2.28}{1.5\cos\alpha_1} - \tan\alpha_1\Big).$$

又因 $L_1 + L_2 = 500$, 我们有

$$\begin{aligned}&\frac{150}{2.28}\Big(\csc\alpha_0\cot\alpha_0 - 2\csc\alpha_0\cot\alpha_1 + \csc\alpha_1\cot\alpha_1\\&+\ln\frac{\csc\alpha_1 - \cot\alpha_1}{\csc\alpha_0 - \cot\alpha_0}\Big) + 380\Big(\frac{2.28}{1.5\cos\alpha_1} - \tan\alpha_1\Big) = 500,\end{aligned} \tag{4.12}$$

及

$$\csc\alpha_1 - \csc\alpha_0 = \frac{2.28}{1.5}. \tag{4.13}$$

将(4.12)与(4.13)联立,

$$\begin{cases} \dfrac{150}{2.28}\Big(\csc\alpha_0\cot\alpha_0 - 2\csc\alpha_0\cot\alpha_1 + \csc\alpha_1\cot\alpha_1 \\ + \ln\dfrac{\csc\alpha_1 - \cot\alpha_1}{\csc\alpha_0 - \cot\alpha_0}\Big) + 380\Big(\dfrac{2.28}{1.5\cos\alpha_1} - \tan\alpha_1\Big) = 500 \\ \csc\alpha_1 - \csc\alpha_0 = \dfrac{2.28}{1.5}, \end{cases}$$

解得 $\alpha_0 = 60.66°, \alpha_1 = 22.02°$. 代入(4.11)式计算得 $t_1 = 167.59$ 秒,而 $t_2 = \dfrac{380}{1.5\cos\alpha_1} = 273.27$ 秒, 于是 $T_{\min} = 2(t_1 + t_2) = 881.7$ 秒.

由上述方法解得的 α_0, α_1 和 $T_{\min}$ 为理论上的精确值.

只要水流速度v是y的分段线性函数, 上述方法仍是有效的. 若v是y的二次或三次以上的函数, 则不能用初等积分法给出类似于公式(4.12)和(4.13)联立方程. 但我们可以将水域分成n个条形区域, 假定在每一区域中v为常数, 利用公式(3.6)和(3.7)及L值, 借助计算机作近似求解.

关于问题3与问题4的讨论

1. 类似问题 2, 对问题 3 与问题 4 可以求得人能游到终点所需的最小速度 u_0. 当 $u < u_0$时, 他都不可能游到终点.

2. 而当 $u > u_0$ 时, 可以证明适合 (3.5) 式的常数 C 恰有两个值. 因此求解问题3与问题4将得到两组 α_0, α_1 及 T 的值, 其中 T 较小的那一组就是最优解. 由于篇幅限制故从略. 欢迎读者作进一步的讨论.

孔敏、姚天行, 抢渡长江最优路径的讨论, 数学的实践与认识, 7 (2005) 136-138

谢 谢